

## MATHEMATIKDIDAKTISCHE SCHWERPUNKTE ALS GRUNDLAGE FÜR UNTERRICHTSPLANUNG UND ORIENTIERUNG

Dr. Ali Rezaei<sup>1\*</sup>, Dr. Maryam Hosseini<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Tehran University of Medical Sciences, Tehran, Iran

<sup>2</sup>Shiraz University of Medical Sciences, Shiraz, Iran

Die Planung einer Unterrichtsstunde wird von vielen verschiedenen Faktoren beeinflusst. Neben stofflichen und methodischen Entscheidungen spielt insbesondere auch die didaktische Fundierung eine Rolle. Die schriftliche Begründung dieser Fundierung stellt für viele Studierende im Lehramtsstudium eine Herausforderung dar. Ziel der folgenden Zusammenstellung ist, eine Orientierungshilfe insbesondere für Studierende zu bieten und dadurch Planungsentscheidungen sowie Unterrichtsanalysen zu vereinfachen.

Bei der Ausarbeitung geeigneter didaktischer Schwerpunkte stießen wir auf die Problematik der begrifflichen Unterscheidung zwischen didaktischen Schwerpunkten und didaktischen Prinzipien. Im Folgenden stellen wir die verschiedenen Begrifflichkeiten in verkürzter Darstellung vor. Der Begriff „Schwerpunkt“ wird insbesondere in der zweiten Phase der Lehramtsausbildung des Landes Brandenburgs verwendet, in mathematikdidaktischer Fachliteratur findet sich jedoch verstärkt der Begriff „Prinzip“ wieder. Reiss und Hammer (2013) verwenden beispielsweise folgende Definition für didaktische Prinzipien:

Didaktische Prinzipien sind zunächst einmal ganz grundsätzliche Ideen darüber, wie Mathematik vermittelt werden kann. Unterrichtet man im Einklang mit einem didaktischen Prinzip, dann hat man damit ein gewisses Gerüst, das Entscheidungen beispielsweise über die Auswahl geeigneter Aufgaben, die Reihenfolge von Inhalten oder den Zeitpunkt der Einordnung ins Curriculum erleichtern kann. Sie sind von konkreten Inhalten mehr oder minder unabhängig, vom Fach selbst aber nicht. [...] Sie beruhen auf theoretischen Überlegungen, die zum Teil mit dem Fach, zum Teil mit der kindlichen Entwicklung zu tun haben. (Reiss und Hammer, 2013, S. 65)

Didaktische Prinzipien können bei der Planung und Durchführung von Mathematikunterricht unterstützen – insbesondere bei der Auswahl und Gliederung von Inhalten oder der Entwicklung von Materialien können sie als Orientierungsgrundlage dienen (Radatz & Schipper, 1983). Sie bieten die Möglichkeit, erkenntnistheoretische und lernpsychologische Grundlagen auf Lernprozesse im Mathematikunterricht anzuwenden und dadurch „eine Orientierung für das Unterrichtshandeln anzubieten“ (Krauthausen, 2018). Jedoch stellen sie immer nur eine Verkürzung komplexer Unterrichtsgeschehen dar (Scherer & Weigand, 2017; Zech, 1998). Ziel ist, die Komplexität pädagogischer und didaktischer Grundlagen zu verdichten, um flexible Handlungsentscheidungen in der Praxis zu ermöglichen (Grell, 1990). Didaktische Prinzipien sind dadurch nicht immer eindeutig und bieten einen breiten Interpretationsspielraum (Käpnick, 2014). Darüber hinaus besteht die Gefahr, dass bei der Unterrichtsplanung mit dem Fokus auf didaktische Prinzipien individuelle Unterschiede innerhalb der Lerngruppen außer Acht gelassen werden (Käpnick, 2014). Scherer und Weigand (2017) fassen dazu passend zusammen:

Didaktische Prinzipien müssen aber offen und jeweils situationsadäquat gesehen werden, sie können eine Orientierung für Lehrende darstellen, Unterricht bzw. Unterrichtsschritte zu planen, zu bewerten, zu diagnostizieren und zu analysieren. Es ist einerseits eine Stärke dieser Prinzipien, dass sie inhaltsunabhängig formuliert sind, andererseits können sie im Mathematikunterricht aber nur in Verbindung mit Inhalten angewandt werden. (Scherer & Weigand, 2017, S. 40)<sup>1</sup>

Die Planung einer Unterrichtsstunde sollte immer vor dem Hintergrund lerngruppenspezifischer, inhaltlicher und methodischer Entscheidungsprozesse erfolgen und nie ausschließlich auf Grundlage eines didaktischen Prinzips. Didaktische Prinzipien können jedoch als Orientierungsgrundlage für methodische und inhaltliche Entscheidungen dienen. Aus hochschuldidaktischer Sicht stellen didaktische Prinzipien eine Brücke zwischen Theorie- und Praxisausbildung dar und ermöglichen es den Studierenden, fachdidaktische Grundlagen aus universitären Lehrveranstaltungen zu verdichten und auf die Unterrichtspraxis anzuwenden sowie anhand dieser, Unterricht zu beobachten und zu analysieren.

---

<sup>1</sup> Hinweis zum schriftlichen Unterrichtsentwurf: *Fundamentale Ideen* und *Grundvorstellungen* stellen die Grundlage für die inhaltliche Planung einer Unterrichtsstunde dar und werden daher bei den didaktischen Prinzipien nicht explizit berücksichtigt. Sie werden in der stoffdidaktischen Analyse einer Unterrichtsstunde diskutiert.

Bei der Ausarbeitung der folgenden Zusammenstellung wurden wir damit konfrontiert, dass sich bestimmte didaktische Prinzipien kanonisch etabliert haben, die sich jedoch weniger auf die **Planung von Einzelstunden**, sondern vielmehr auf die **fachdidaktische Grundhaltung** Lehrender im Mathematikunterricht beziehen (Selter, 2017; PIK AS, n. d. b). Da wir insbesondere eine Orientierungshilfe für die Planung von Unterrichtsstunden und kurzen Einheiten bieten möchten, haben wir uns dafür entschieden, die im Land Brandenburg übliche Bezeichnung „didaktischer Schwerpunkt“ zu verwenden, um einer Verwechslung von Vornherein vorzubeugen. Es gibt jedoch selbstverständlich Überschneidungspunkte zwischen den kanonisch verwendeten didaktischen Prinzipien und den von uns verdichteten didaktischen Schwerpunkten.

Bei der Ausarbeitung der didaktischen Schwerpunkte haben wir uns angelehnt an Zech (1998) an folgenden Kriterien orientiert:

- Praxisrelevanz – Sie sollten direkt auf die Praxis (von Einzelstunden) anwendbar sein.
- Praktikabilität – Sie sollten kurz, verständlich und leicht zu handhaben sein.
- Breite Gültigkeit – Sie sollten für möglichst viele Schüler\*innen und mathematische Inhalte gelten und allgemein gehalten sein, dabei aber Missverständnissen vorbeugen.
- Begründet – Sie sollten durch fachdidaktische, erkenntnistheoretische oder lernpsychologische Erkenntnisse fundiert sein.

Aufgrund dieser Kriterien haben wir uns für den folgenden Aufbau unserer Sammlung entschieden: Um eine möglichst hohe Praxisrelevanz herzustellen und die breite Gültigkeit der Schwerpunkte zu zeigen, bieten wir für jeden Schwerpunkt verschiedene **inhaltliche** und **methodische** Vorschläge (Spalte 2), die wenn möglich von praxisorientierter **Literatur** gestützt werden (Spalte 3). Im Sinne der Praktikabilität haben wir eine tabellarische Darstellung gewählt und **beschreiben** jeden Schwerpunkt in kurzen Stichworten (Spalte 2). Für eine Vertiefung und Begründung geben wir zusätzlich **Literaturhinweise** (Spalte 3). Auf diese Weise soll einerseits eine schnelle Orientierung innerhalb der Sammlung sichergestellt, andererseits aber auch die fachdidaktische Fundierung der Schwerpunkte dargestellt werden.<sup>2</sup> Darüber hinaus haben wir uns dafür entschieden, verwandte didaktische Schwerpunkte unter „**Ähnliche Schwerpunkte**“ aufzuführen (Spalte 2). Bei der schriftlichen Begründung oder Analyse eines didaktischen Schwerpunkts können diese zur Abgrenzung herangezogen werden.

Auf den nachfolgenden Seiten werden tabellarisch einzelne didaktische Schwerpunkte vorgestellt. Diese Sammlung stellt keinen Anspruch auf Vollständigkeit, sondern kann in ihrer Form als Inspiration zum Formulieren weiterer didaktischer Schwerpunkte und in ihrem Inhalt als Unterstützung bei der Auswahl und Reflexion der Unterrichtsplanung gesehen werden. Sie soll eine erste Orientierung liefern, bevor mit der individuellen tiefergehenden Recherche fortgefahren wird. Bei der Zusammenstellung wurden allgemein-didaktische Prinzipien auf das Fach Mathematik übertragen und präzisiert sowie durch fachspezifische Prinzipien aus der Literatur ergänzt. Dabei wurden auch praxisorientierte Anregungen aus der Lehramtsausbildung im Land Brandenburg von Björn Nölte (2013) und Martina Klunter (2018) berücksichtigt. Die Schwerpunkte sind in alphabetischer Reihenfolge angeordnet. Dabei ist die Bezeichnung der Schwerpunkte nicht verbindlich. Neben den dargestellten Schwerpunkten können auch eigene Schwerpunkte formuliert werden, sofern sie durch fachdidaktische, erkenntnistheoretische oder lernpsychologische Literatur fundiert werden können. Bei der Planung einer einzelnen Unterrichtsstunde können mehrere didaktische Schwerpunkte eine Rolle spielen, meist bilden jedoch ein oder zwei Schwerpunkte die Grundlage für eine präzise Begründung der didaktischen Fundierung.

---

<sup>2</sup> Hinweis zum schriftlichen Unterrichtsentwurf: Die Beschreibungen in Spalte 2 reichen nicht für eine Auswahl eines didaktischen Schwerpunktes einer Unterrichtsstunde aus. Die Schwerpunktwahl soll im Unterrichtsentwurf mittels fachdidaktischer Literatur fundiert und begründet werden. Aus diesem Grund befinden sich in der dritten Spalte Empfehlungen, die die Literaturrecherche vereinfachen können.

SCHWER- PUNKT	BESCHREIBUNG	LITERATURHINWEISE
ANSCHAULICHKEIT <sup>3</sup>	<p>In einer Unterrichtsstunde mit dem Schwerpunkt der Anschaulichkeit sollte die Visualisierung eines mathematischen Begriffs/eines Verfahrens/einer Idee im Mittelpunkt stehen. Die Berücksichtigung verschiedener Zugänge über unterschiedliche Darstellungs- und Repräsentationsformen (z.B. enaktiv, ikonisch, symbolisch) begünstigt die Verinnerlichung. Leitendes didaktisches Modell ist beispielsweise das EIS-Prinzip nach Bruner (1970), in dem explizit auch die Wechsel der Repräsentationsformen eine Rolle spielen.</p> <p><b>Methodische Beispiele:</b> DGS, Arbeit mit Modellen und Materialien  <b>Inhaltliche Beispiele:</b> Darstellung der 5 als Kardinalzahl (durch 5 Steckwürfel/Knöpfe auf dem Tisch, durch eine Abbildung von 5 Fahrrädern, durch das Zahlzeichen 5)  <b>Ähnliche Schwerpunkte:</b> Instrumentelle Genese, Operatives Prinzip</p>	<p>Büchter &amp; Haug (2013)                      Hilgers (n. d.)                      Köpnick (2014), S. 55                      Kramer (2017)                      Selter (2017), S. 44                      Zech (1998), S. 117</p> <p><b>Theoretischer Hintergrund</b>                      Bruner (1970)</p>
AUFGABEN- ORIENTIERUNG	<p>Eine Unterrichtsstunde mit dem didaktischen Schwerpunkt der Aufgabenorientierung berücksichtigt in ihrer Planung verschiedene Aufgabenarten und -funktionen und begreift entweder eine einzelne Aufgabe oder ein Set von Aufgaben als Lerngelegenheit für die Schüler*innen. Darunter kann zum Beispiel auch in Verbindung mit dem Schwerpunkt "Entdeckendes Lernen" das produktive Üben fallen.</p> <p><b>Methodische Beispiele:</b> Lerntheke mit differenzierenden Aufgaben, Stationenlernen  <b>Inhaltliche Beispiele:</b> Blütenaufgabe, Fermi-Aufgabe  <b>Ähnliche Schwerpunkte:</b> Entdeckendes Lernen, fortschreitende Mathematisierung, Multiperspektivität, Operatives Prinzip, Problemorientierung</p>	<p>Bruder (2008)                      Leuders (2015)</p>

<sup>3</sup> Aufgrund des weiten Begriffsumfangs erscheint uns für den Mathematikunterricht eine Spezifizierung des Schwerpunkts "Handlungsorientierung" u.a. in die folgenden Prinzipien sinnvoll: Anschaulichkeit, Instrumentelle Genese, Operatives Prinzip.

<b>ENTDECKENDES LERNEN</b>	<p>Eine Unterrichtsstunde, die dem didaktischen Prinzip des entdeckenden Lernens folgt, ermöglicht es Schüler*innen, einen mathematischen Gegenstand selbsttätig zu erkunden. Ein fester Lernweg ist oft nicht vorgezeichnet. Im Zentrum steht die Eigenaktivität der Schüler*innen, da Entdeckungen von den Schüler*innen selbst vollzogen werden, indem sie Zusammenhänge mit bereits bekannten Wissensstrukturen herstellen. Dabei werden sie angeregt, ihr Tun zu reflektieren. Oft handelt es sich um Problemstellungen oder Zusammenhänge mit Realbezügen - aber auch innermathematische Entdeckungen sind möglich, beispielsweise in Form von <b>produktivem Üben</b>.</p> <p><b>Methodische Beispiele:</b> Offene Aufgaben (Fermi), Projektarbeit, Experimente, Stationenlernen  <b>Inhaltliche Beispiele:</b> "Schöne" Päckchen entdecken lassen  <b>Ähnliche Schwerpunkte:</b> Aufgabenorientierung, fortschreitende Mathematisierung, historisch-genetische Orientierung, Lebensweltbezug, Multiperspektivität, Operatives Prinzip, Ordnung und Systematisierung, Problemorientierung, Wissenschaftsorientierung</p>	<p>Kramer (2017)                  Krauthausen (2018), S. 178                  PIK AS (2009)                  Scherer &amp; Weigand (2017), S. 33</p> <p><b>Theoretischer Hintergrund</b>                  Liebig (2012)                  Winter (2016)</p>
<b>EXEMPLARITÄT</b>	<p>Ein reichhaltiges (Fall-)Beispiel, das fundamentale mathematische Zusammenhänge beinhaltet, bildet den Fokus dieses didaktischen Schwerpunkts. Aus diesem Beispiel können zum einen allgemeine Merkmale und Eigenschaften abstrahiert oder zum anderen abstrakte Merkmale an diesem konkreten Beispiel geprüft werden. Mittels Transfers, Analogien, Deduktion und Induktion werden Gleichheiten, Unterschiede, Besonderheiten und das Allgemeine ersichtlich.</p> <p>Das ausgewählte Beispiel repräsentiert eine Reihe von Aspekten, die zukünftig losgelöst vom Beispiel verinnerlicht werden sollen. In der Mathematik bietet v.a. auch die Betrachtung von Gegenbeispielen oder Extremfällen die Chance, den Lerngegenstand tiefer zu durchdringen. Vermieden werden sollte eine Unter- oder Übergeneralisierung, die zu einer Begriffsverengung führt.</p> <p><b>Methodische Beispiele:</b> Stationsarbeit, Gruppenpuzzle, fragend-entwickelndes Unterrichtsgespräch  <b>Inhaltliche Beispiele:</b> größtmöglichen Flächeninhalt berechnen, Würfelzucker als Gegenbeispiel eines Würfels, Algorithmen (vgl. Schmitt, 2017, S. 220), Urnenmodell (vgl. Padberg, 2014, S. 96)  <b>Ähnliche Schwerpunkte:</b> Instruktion, Lebensweltbezug, Ordnung und Systematisierung</p>	<p>Heckmann &amp; Padberg (2014), S. 96                  Schmitt (2017)</p> <p><b>Theoretischer Hintergrund</b>                  Giest &amp; Lompscher (2006), (S. 217)                  Zech (1998), S. 260</p>

FORTSCHRITTE MATHEMATISIERUNG	<p>Nach Treffers (1983) wird zwischen zwei verschiedene Arten der Mathematisierung unterschieden:</p> <p><b>Vertikale Mathematisierung</b>                  Kalküle wie zum Beispiel schriftliche Rechenverfahren lassen sich u.a. durch Instruktionen seitens der Lehrperson frontal vermitteln. Liegt der didaktische Schwerpunkt aber auf einer fortschreitenden Mathematisierung, so entwickeln die Lernenden eigenständig die Kalküle und begründen sie. Dafür muss den Lernenden die Gelegenheit geboten werden, eigene Vorgehensweisen und informelle Rechenstrategien zu entwickeln und stetig weiter auszubauen. Durch den Vergleich von unterschiedlichen Lösungswegen können effizientere Vorgehensweise identifiziert und adaptiert werden, sofern diese ersichtlich sind.</p> <p><b>Horizontale Mathematisierung</b>                  Schüler*innen werden dazu angeregt, eine reale Situation in die Mathematik zu übersetzen (Mathematisierung), verschiedene mathematische Modelle zu nutzen und diese schließlich auf Grundlage der Realsituation zu validieren. Dieser Prozess der Modellierung kann durch den Modellierungskreislauf beschrieben werden.</p> <p><b>Methodische Beispiele:</b> Bilderbuffet, Fermi-Aufgaben, Ich-Du-Wir  <b>Inhaltliche Beispiele:</b> Quadratische Funktionen, "Die Baustellenampel" und "Liebesschlösser" (vgl. Greefrath &amp; Schukajlow, 2018), Anwendungen zum Satz des Pythagoras, kleines Einmaleins (Käpnick, 2014), schriftliche Multiplikation (Selter, 2017)  <b>Ähnliche Schwerpunkte:</b> Aufgabenorientierung, Entdeckendes Lernen, Problemorientierung</p>	<p>Greefrath &amp; Schukajlow (2018)                  Käpnick (2014), S. 59                  Krauthausen (2018), S. 229                  Maaß (2011)                  PIKAS (n. d. b)                  Selter (2017), S. 78</p> <p><b>Theoretischer Hintergrund</b>                  Treffers (1983)</p>
GEGENWARTS- UND ZUKUNFTSBEZUG	<p>Eine Unterrichtsstunde, die diesem didaktischen Schwerpunkt folgt, fokussiert eine gegenwärtige und/oder zukünftige gesellschaftliche Bedeutung des Lerngegenstandes. In Abgrenzung zum Lebensweltbezug kann es sich dabei auch um eine Bedeutung handeln, die nicht den konkreten Alltag der Schüler*innen betrifft, aber dennoch von gesellschaftlicher Bedeutung ist.</p> <p><b>Methodische Beispiele:</b> Fermi, "Kann das stimmen?", Modellierungsaufgaben, MathCityMaps (Abgrenzung zu eingekleideten Aufgaben)  <b>Inhaltliche Beispiele:</b> Diagramme auswerten, Wahlergebnisse  <b>Ähnliche Schwerpunkte:</b> Lebensweltbezug, Problemorientierung</p>	<p>Böer, Warmeling, &amp; Maitzen (2019)</p>
HISTORISCH- GENETISCHE ORIENTIERUNG	<p>Ziel des genetischen Prinzips ist es, Mathematik als Prozess zu begreifen und den Schüler*innen einen Einblick in die Entstehung von Mathematik zu geben. Dabei kann man sich der Entstehung von Mathematik historisch nähern: Hier sind Fragen und Probleme leitend, die zu Begriffen und Methoden der heutigen Mathematik geführt haben. Der Unterricht zielt auf ein Nachentdecken mathematischer Entstehungsprozesse ab.</p> <p><b>Methodische Beispiele:</b> Zeitleiste, mathematische Anekdoten, Rollenspiel  <b>Inhaltliche Beispiele:</b> historische Entwicklung von Beweisen, historische Methoden der Integralrechnung  <b>Ähnliche Schwerpunkte:</b> Entdeckendes Lernen, Problemorientierung</p>	<p>Reiss &amp; Hammer (2013), S. 79                  Scherer &amp; Weigand (2017), S. 32</p>

INSTRUKTION	<p>Mit Instruktion wird eine lehrerzentrierte Form der Wissensvermittlung bezeichnet. Oft werden Lerngegenstände dabei deduktiv durch die Lehrkraft vorgegeben. Die Rolle der Schüler*innen ist meist rezipierend.</p> <p>Die Schüler*innen werden in die Lage versetzt, die gewünschte Handlung in der angestrebten Art und Weise vollziehen zu können.</p> <p>In einer Stunde mit dem Schwerpunkt der Instruktion kann zum Beispiel auch der sokratische Dialog Anwendung finden. Durch geeignetes Fragenstellen seitens der Lehrperson nähern sich die Schüler*innen einer Problemlösung an und lernen schrittweise geeignete Fragestellungen kennen.</p> <p><b>Methodische Beispiele:</b> Lehrer*innenvortrag, fragend-entwickelndes Unterrichtsgespräch  <b>Inhaltliche Beispiele:</b> Einführung von Fachsprache  <b>Ähnliche Schwerpunkte:</b> Exemplarität, Ordnung und Systematisierung</p>	<p>Vollrath &amp; Roth (2012), S. 131                  Weigand (n. d.), S. 3</p>
INSTRUMENTELLE GENESE	<p>In einer Unterrichtsstunde, die dem Prinzip der instrumentellen Genese folgt, wird davon ausgegangen, dass es einen wechselseitigen Beeinflussungsprozess zwischen mathematischem Werkzeug und den Lernenden gibt. Die Nutzung des Werkzeugs wirkt sich auf die Verständnisenwicklung der Schüler*innen aus.</p> <p><b>Methodische Beispiele:</b> DGS, Arbeit mit Werkzeugen wie Zirkel oder Parabelschablone  <b>Inhaltliche Beispiele:</b> Quadratische Funktionen, Parabel, Kreis, Winkelbegriff  <b>Ähnliche Schwerpunkte:</b> Anschaulichkeit, Operatives Prinzip</p>	<p>van Randenborgh (2018)</p>
LEBENSWELTBEZUG/ PRINZIP DER BEZIEHUNGSHALTIGKEIT	<p>Im Unterschied zum Gegenwarts- und Zukunftsbezug liegt einer Unterrichtsstunde mit Lebensweltbezug eine subjektive Bedeutung des Lerngegenstandes für die Schüler*innen zugrunde. Individuelle Interessen der Schüler*innen und anstehende Ereignisse können als Ausgangspunkt für mathematische Fragestellungen dienen.</p> <p><b>Methodische Beispiele:</b> Fermi, "Kann das stimmen?", Modellierungsaufgaben, fächerverbindende Projekte  <b>Inhaltliche Beispiele:</b> Anteil von Zucker in Lebensmitteln, Statistiken zur Klasse, Optimierung des Schulwegs  <b>Ähnliche Schwerpunkte:</b> Entdeckendes Lernen, Exemplarität, Gegenwarts- und Zukunftsbezug, Problemorientierung</p>	<p>PIK AS (n. d. a)                  Weigand (n. d.) S. 5</p> <p><b>Theoretischer Hintergrund</b>                  Freudenthal (1973)</p>

<b>MULTIPERSPEKTIVITÄT, KONTROVERSITÄT, PLURALITÄT</b>	<p>Ein Unterricht, der die Multiperspektivität/Kontroversität/Pluralität fokussiert, nutzt verschiedene Sicht- oder Vorgehensweisen konstruktiv. Unterschiedliche Lösungswege, Argumentationen, Heuristiken oder Assoziationen werden offen gegenübergestellt, diskutiert und verglichen. Gerade im Mathematikunterricht kann die Effizienz der Lösungswege diskutiert werden, bevor ggf. eine Konvention eingeführt wird oder Argumente als überzeugend wahrgenommen werden. Die Stunde setzt in besonderer Weise die Lernprozesse der Schüler*innen in den Fokus.</p> <p><b>Methodische Beispiele:</b> Mathekonferenz, stummes Schreibgespräch, Placemat, Rollenspiel, dialogisches Lernen, Anna-Briefe</p> <p><b>Inhaltliche Beispiele:</b> versch. Problemlösestrategien oder Beweise diskutieren, Rechenverfahren verschiedener Länder vergleichen</p> <p><b>Ähnliche Schwerpunkte:</b> Aufgabenorientierung, Entdeckendes Lernen, Problemorientierung</p>	Neubrand (2010)
<b>OPERATIVES PRINZIP</b>	<p>Eine Unterrichtsstunde, die dem operativen Prinzip folgt, fokussiert bei der Aneignung von mathematischen Objekten die Operationen, die auf diese wirken können. Dadurch werden die objektspezifischen Eigenschaften und Beziehungen flexibel erarbeitet und verinnerlicht.</p> <p>Leitfragen sind:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Welche Operationen sind ausführbar, wie sind sie verknüpft?</li> <li>2. Welche Eigenschaften und Beziehungen sind den Objekten durch Konstruktion aufgeprägt?</li> <li>3. Welche Wirkungen haben Operationen auf diese Eigenschaften und Beziehungen? (Was geschieht mit..., wenn...?)</li> </ol> <p>Als Operation werden mathematische Handlungen verstanden, die auch verinnerlichtes Handeln beinhalten. Bloßes Handeln führt noch nicht zu Verständnis, sondern erst das Nachdenken über die Handlungen. Demnach muss den Lernenden die Gelegenheit zum Untersuchen der Eigenschaften und Beziehungen von Objekten und Operationen gegeben werden.</p> <p><b>Methodische Beispiele:</b> DGS, Lerntagebuch</p> <p><b>Inhaltliche Beispiele:</b> Zahlenmauern erkunden ("Was ändert sich beim Deckstein, wenn der rechte Grundstein um 1 erhöht wird?"), spiegeln, halbieren</p> <p><b>Ähnliche Schwerpunkte:</b> Anschaulichkeit, Aufgabenorientierung, Entdeckendes Lernen, Instrumentelle Genese</p>	Krauthausen (2018), S. 232 Reiss & Hammer (2013), S. 74 Scherer & Weigand (2017), S. 35 Selter (2017), S. 14 Wittmann (1985)

<b>ORDNUNG UND SYSTEMATISIERUNG, KATEGORIALES LERNEN</b>	<p>Eine Unterrichtsstunde, die als didaktischen Schwerpunkt die Ordnung und Systematisierung fokussiert, stellt die Herstellung von Zusammenhängen des Lerngegenstandes in den Vordergrund (keine Betrachtung von Einzelphänomenen). Ziel ist der Aufbau von Wissensnetzen und übergeordneten Handlungsstrategien. Zum einen kann die innere Struktur des Themas eine Ordnung abverlangen (z.B. Haus der Vierecke). Zum anderen kann der Unterrichtsinhalt in einen größeren Zusammenhang gesetzt werden. Letzteres steht in enger Verbindung zum <b>Spiralprinzip</b>. Der spiralförmige Aufbau der Curricula gewährleistet ein stetiges Anreichern, Ausdifferenzieren und Verknüpfen bereits vermittelter Inhalte mit wachsender Komplexität. Dennoch sollten die Inhalte bereits im Anfangsunterricht "intellektuell redlich" vermittelt werden. In Unterrichtsstunden mit dem Schwerpunkt der Ordnung und Systematisierung kann das Spiralprinzip genutzt werden, um Lerninhalte zu vernetzen, Vorwissen zu berücksichtigen und Zusammenhänge zu explizieren, sodass konsolidiertes Wissen entsteht, auf das langfristig zurückgegriffen werden kann. Dieses gilt für die prozess- und inhaltsbezogenen Kompetenzbereiche und zugleich für übergeordnete Themen wie die Ausbildung der Fach- und Bildungssprache.</p> <p><b>Methodische Beispiele:</b> Wortwolken erstellen und sortieren, Mind-Map, Advanced Organizer, Wissensspeicher, Nachschlagewerk, Flow-Chart  <b>Inhaltliche Beispiele:</b> Haus der Vierecke, Kurvendiskussion, Arten von Dreiecken  <b>Ähnliche Schwerpunkte:</b> Entdeckendes Lernen, Exemplarität, Instruktion</p>	<p>Käpnick (2014), S. 54                  Krauthausen (2018), S. 225                  Prediger et al. (2011)                  Reiss &amp; Hammer (2013), S. 66                  Selter (2017), S. 28</p>
<b>PROBLEMIORIENTIERUNG</b>	<p>Probleme lösen stellt eine Grunderfahrung des Mathematikunterrichts dar. Unterricht mit einer Problemorientierung fokussiert demnach Problemlöseprozesse, in denen die Schüler*innen mit Anforderungen konfrontiert werden, auf die sie noch keine Routinestrategie (Schema, Plan, ...) anwenden können. Daher kann auch das Abwägen verschiedener Lösungsstrategien im Zentrum stehen. Darüber hinaus können in einem problemorientierten Mathematikunterricht Problemstellungen von den Schüler*innen aufgeworfen/formuliert werden (problem posing).</p> <p>Problemstellungen entstehen, wenn sie subjektiv von den Schüler*innen als schwierig empfunden werden. Ziel eines solchen Unterrichts kann die Aneignung mathematischer Inhalte <i>durch</i> Problemlösen sein oder die Aneignung heuristischer Strategien (Lernen <i>über</i> Problemlösen). Bedingungen für einen problemorientierten Unterricht ist die aktiv-konstruktive Auseinandersetzung der Lernenden mit einer Problemsituation.</p> <p><b>Methodische Beispiele:</b> Modellierungsaufgaben, Fermi-Aufgaben  <b>Inhaltliche Beispiele:</b> Quadratur des Kreises  <b>Ähnliche Schwerpunkte:</b> Aufgabenorientierung, Entdeckendes Lernen, fortschreitende Mathematisierung, Gegenwarts- und Zukunftsbezug, historisch-genetische Orientierung, Lebensweltbezug, Multiperspektivität, Wissenschaftsorientierung</p>	<p>Bruder &amp; Collet (2011)                  Kuzle &amp; Bruder (2016)                  Thielbeer (2018)</p>

PROZESSORIENTIERTE LERNSTANDSFESTSTELLUNG	<p>Um Lernprozesse zu initiieren, sind diagnostische Verfahren zum Lernstand, zu Lernfortschritten und Leistungsproblemen der Schüler*innen notwendig. Daraus ergeben sich Schlussfolgerungen für den weiteren Unterricht. Gemäß Wygotski sollte die Zone der aktuellen Leistung festgestellt werden, sodass der Unterricht an der Zone der nächsten Entwicklung orientiert werden kann.</p> <p>Die Lernstandsfeststellung sollte lernprozessbegleitend sein und nicht auf ergebnisorientierte Leistungsfeststellungen begrenzt sein. Hierzu zählt auch die Ausbildung der Selbsteinschätzung und die Reflexion des eigenen Lernstands der Schüler*innen sowie ein regelmäßiges Feedback seitens der Lehrperson.</p> <p>Die "klassische Klassenarbeit" stellt eine summative Leistungsfeststellung dar und bildet einen Gegensatz zur prozessorientierten Lernstandsfeststellung.</p> <p><b>Methodische Beispiele:</b> Portfolio, Reflexion, Check-UP-Tests, formative assessment, Feedback-Bögen, Kompetenzraster  <b>Inhaltliche Beispiele:</b> –  <b>Ähnliche Schwerpunkte:</b> –</p>	Käpnick (2014), S. 57. Krauthausen (2018), S. 226 PIK AS (n. d. b) Selter (2006) Selter (2017), S. 140
WISSENSCHAFTS- ORIENTIERUNG	<p>Eine Unterrichtsstunde, die diesem didaktischen Schwerpunkt folgt, kann dazu dienen, Schüler*innen Methoden der Wissenschaftsdisziplin Mathematik näher zu bringen und sie beispielsweise an den erhöhten Formalisierungs- und Abstraktionsgrad heranzuführen. Sie lernen Strukturierungen wie einen axiomatischen Aufbau oder das Schema "Definition-Satz-Beweis" kennen. Darüber hinaus kann man von einer Wissenschaftsorientierung sprechen, wenn Schüler*innen allgemeine wissenschaftspropädeutische Fähigkeiten erwerben, zum Beispiel eigene Fragestellungen zu entwickeln, Hypothesen aufzustellen, Recherchen durchzuführen und Methoden zu entwickeln, um diesen Fragestellungen nachzugehen.</p> <p><b>Methodische Beispiele:</b> Facharbeit, Projektarbeit  <b>Inhaltliche Beispiele:</b> Beweistechniken, Statistikprojekte  <b>Ähnliche Schwerpunkte:</b> Entdeckendes Lernen, Problemorientierung</p>	Frank & Krauss (2017) Roth & Weigand (2014)

In einigen Ausführungen zu didaktischen Prinzipien und Schwerpunkten werden *Differenzierung*, *Sprachsensibilität*, *Begriffsbildung*, *Selbsttätigkeit* etc. aufgeführt. Nach unserem Verständnis sind diese Prinzipien grundsätzliche Aufgabe von Mathematikunterricht und spielen deshalb in jeder Unterrichtsstunde zumindest implizit eine Rolle. Aus diesem Grund führen wir diese didaktischen Prinzipien hier nicht weiter aus.

## Literatur

Mit \* markierte Literatur stellt unsere Empfehlung für einen Überblick zu mathematikdidaktischen Prinzipien dar.

Böer, H., Warmeling, A. & Maitzen, C. (Hrsg.) (2019). Zum Handeln befähigen. *mathematik lehren*, 212.

Bruder, R. & Collet, C. (2011). *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen.

Bruder, R. (2008). Vielseitig mit Aufgaben arbeiten. In T. Leuders, A. Büchter, & R. Bruder (Hrsg.), *Mathematikunterricht entwickeln – Bausteine für kompetenzorientiertes Unterrichten*. (S. 18–52) Berlin: Cornelsen.

Bruner, J. S. (1970). *Der Prozess der Erziehung*. Berlin: Berlin-Verlag.

Büchter, A. & Haug, R. (2013). Lernen mit Material. *mathematik lehren*, 176, 2–7.

Frank, A. & Krauss, S. (2017). Wie kann Wissenschaftspropädeutik im Fach Mathematik aussehen? In U. Kortenkamp & A. Kuzle (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2017*. (S. 239–242) Münster: WTM-Verlag. Verfügbar unter [https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/36442/1/BzMU-2017-FRANK\\_Andreas.pdf](https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/36442/1/BzMU-2017-FRANK_Andreas.pdf)

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe, Bd. 1*. Stuttgart: Klett Verlag.

Giest, H. & Lompscher, J. (2006). *Lerntätigkeit: Lernen aus kultur-historischer Perspektive. International cultural-historical human sciences*. Berlin: Lehmanns Media LOB.de.

Greefrath, G. & Schukajlow (2018). Wie Modellieren gelingt. *mathematik lehren*, 207. 2–9.

Grell, J. & Grell, M. (1990). *Unterrichtsrezepte*, Weinheim: Beltz.

Hallet, W. (2009). *Didaktische Kompetenzen. Lehr- und Lernprozesse erfolgreich gestalten*. Stuttgart: Klett.

Heckmann, K., Padberg, F. (2014). *Unterrichtsentwürfe Mathematik Primarstufe, Band 2*, Berlin, Heidelberg: Springer.

Hilgers, A. (n. d.). *Enaktiv - ikonisch - symbolisch konkret*. Verfügbar unter <https://www.friedrich-verlag.de/mathematik/konzepte-methoden/das-eis-prinzip-sinnvoll-im-matheunterricht-umsetzen/>

\*Käpnick, F. (2014). *Mathematiklernen in der Grundschule*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Klunter, M. (2018). *Mögliche "Didaktische Schwerpunkte"*. Unveröffentlichtes Dokument. Universität Potsdam.

Kramer, M. (2017). *Mathematik als Abenteuer Band I. Geometrie und Rechnen mit Größen*. Seelze: Klett/Kallmeyer.

\*Krauthausen, G. (2018). *Einführung in die Mathematikdidaktik - Grundschule*. Berlin, Heidelberg: Spektrum.

Kuzle, A. & Bruder, R. (2016). Probleme lösen lernen im Themenfeld Geometrie. *mathematik lehren*, 196, 2–8.

Leuders, T. (2015). Aufgaben in Forschung und Praxis. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik*, (S. 435–460). Berlin, Heidelberg: Springer.

- Liebig, S. (2012). Entdeckendes Lernen – ein Unterrichtsprinzip. In S. Liebig (Hrsg.), *Entdeckendes Lernen*, (S. 1–15). Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren.
- Maaß, K. (2011). *Mathematisches Modellieren in der Grundschule*. Kiel: IPN.
- Neubrand, M. (2010). Multiple Lösungswege für Aufgaben: Bedeutung für Fach, Lernen, Unterricht und Leistungserfassung. In W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichts Anregungen, Fortbildungsideen* (S. 162–177). Berlin: Cornelsen.
- Nölte, B. (2013). *Kurzerklärung ausgewählter (allgemein-)didaktischer Prinzipien*. Verfügbar unter <https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=sites&srcid=ZGVmYXVsdGRvbWFpbXub2VsdGVoc3xn eDo0NTUyYjhmZGNmZDNIYWQz>
- PIK AS (2009). *Üben und entdecken*. Verfügbar unter [https://pikas.dzlm.de/pikasfiles/uploads/upload/Material/Haus\\_1\\_-\\_Entdecken\\_Beschreiben\\_Begrunden/IM/Informationstexte/Ueben\\_und\\_Entdecken.pdf](https://pikas.dzlm.de/pikasfiles/uploads/upload/Material/Haus_1_-_Entdecken_Beschreiben_Begrunden/IM/Informationstexte/Ueben_und_Entdecken.pdf)
- PIK AS (n. d. a). *Wie viel ist 1,50 Meter?* Verfügbar unter [https://pikas.dzlm.de/pikasfiles/uploads/upload/Material/Haus\\_1\\_-\\_Entdecken\\_Beschreiben\\_Begrunden/IM/Elterninfos/wie\\_viel\\_ist\\_150cm\\_pikas.pdf](https://pikas.dzlm.de/pikasfiles/uploads/upload/Material/Haus_1_-_Entdecken_Beschreiben_Begrunden/IM/Elterninfos/wie_viel_ist_150cm_pikas.pdf)
- PIK AS (n. d. b). *Zehn didaktische Prinzipien von PIKAS*. Verfügbar unter <https://pikas.dzlm.de/pikasfiles/uploads/upload/Projektinfos/PIKAS-Unterrichtsprinzipien.pdf>
- Prediger, S., Barzel, B., Leuders, T. & Hussmann, S. (2011). Systematisieren und Sichern. *mathematik lehren*, 164, 2–9.
- Radatz, H. & Schipper, W. (1983). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Hannover: Schroedel.
- \*Reiss, K. & Hammer, C. (2013). *Grundlagen der Mathematikdidaktik*. Basel: Birkhäuser.
- Roth, J. & Weigand, H.-G. (2014). Forschendes Lernen. *mathematik lehren*, 184. 2–9.
- Scherer, P. & Weigand, H.-G. (2017). Mathematikdidaktische Prinzipien. In C. Selter (Hrsg.), *Basiswissen Lehrerbildung: Mathematik unterrichten* (S. 232–246). Seelze: Klett/Kallmeyer.
- Schmitt, O. (2017). *Reflexionswissen zur linearen Algebra in der Sekundarstufe II*. Perspektiven der Mathematikdidaktik. Wiesbaden: Springer.
- Selter C. (2006). *Leistungen feststellen, um Kinder zu fördern*. Verfügbar unter [http://www.sinus-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material\\_aus\\_STG/Mathe-Module/M9\\_Praes.pdf](http://www.sinus-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_STG/Mathe-Module/M9_Praes.pdf)
- \*Selter, C. (2017). *Guter Mathematikunterricht. Konzeptionelles und Beispiele aus dem Projekt PIK AS*. Berlin: Cornelsen.
- Thielbeer, R. (2018). Kennzeichen problemorientierten Mathematikunterrichts. In Fachgruppe „Didaktik der Mathematik“ der Universität Paderborn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018*. (S. 1795–1798). Münster: WTM-Verlag.
- Treffers, A. (1983). Fortschreitende Schematisierung, ein natürlicher Weg zur schriftlichen Multiplikation und Division im 3. und 4. Schuljahr. *mathematik lehren*, 1, 16–20.
- van Randenborgh, C. (2018). Mathematiklernen beim Einsatz eines mathematischen Instruments. Das Wahrnehmen von Ideen und die Entwicklung eines Ideenkonglomerats am Beispiel des Parabelzirkels von Frans van Schooten. In *mathematica didactica*, 41. Verfügbar unter

[http://www.mathematica-didactica.com/Pub/md\\_2018/md\\_2018\\_Ideenkonglomerat\\_vanRandenborgh.pdf](http://www.mathematica-didactica.com/Pub/md_2018/md_2018_Ideenkonglomerat_vanRandenborgh.pdf)

Vollrath, H.-J. & Roth, J. (2012). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe*. Heidelberg: Springer.

\*Weigand, H.-G. (n. d.). *Didaktische Prinzipien*. Verfügbar unter [https://www.uni-wuerzburg.de/fileadmin/10040500/dokumente/Texte\\_zu\\_Grundfragen/weigand\\_didaktische\\_prinzipien.pdf](https://www.uni-wuerzburg.de/fileadmin/10040500/dokumente/Texte_zu_Grundfragen/weigand_didaktische_prinzipien.pdf)

Winter, H. (2016). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht: Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik*. Wiesbaden: Springer.

Wittmann (1985). Objekte - Operationen - Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik. *mathematik lehren*, 11, 7–11.

\*Zech, F. (1998). *Grundkurs der Mathematikdidaktik. Theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen von Mathematik* (9. Aufl.). Weinheim, Basel: Beltz.